6.1. část 1

sobota 9. ledna 2021 1:19

(1) $$\lim_{x\to 0} (1+x^3)^{\frac{\cos x}{x\sin(x^2)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos x}{x\sin(x^2)}\log(1+x^3)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x\sin(x^2)}\cdot\log(1+x^3) = \lim_{x\to 0} \cos x\cdot\frac{\log(1+x^3)}{x^3}\cdot\frac{x^2}{\sin(x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{x^3} = 1$$ (známá limita $\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = 1$ a VOLSF podmínka (P) $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$$ (známá limita $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ a VOLSF podmínka (P) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$)

Tedy $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x\sin(x^2)}\cdot\log(1+x^2) = 1$$

a $$\lim_{x\to 0}(1+x^3)^{\frac{\cos x}{x\sin(x^2)}} = e^1 = \underline{\underline{e}}$$

VOLSF podmínka (S) e^x spojitá v 1

(2) $f(x) = \log(|x^2-2|+1)$

- $D_f = \mathbb{R}$ $\quad \left(D_{\log} = (0,\infty),\ D_{|x^2-1|+1} = \mathbb{R} \text{ a } |x^2-1|+1 \geq 1\ x \in \mathbb{R} \right)$

- f je spojitá na D_f (funkce $\log x$ i $|x^2-2|+1$ jsou spojité)

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} \log x = +\infty \text{ a } \lim\limits_{x\to\pm\infty} |x^2-2|+1 = +\infty \right.$

  a VOLSF podmínka (P))

- f je sudá $\left(\log(|(-x)^2-2|+1) = \log(|x^2-2|+1) \right)$

  f není lichá (např. protože je sudá a není nulová)

  f není periodická (např. protože $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$)

- $f'(x) = \dfrac{2x}{|x^2-2|+1} \cdot \operatorname{sgn}(x^2-2)$ $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$

- $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}\pm} f'(x) = \pm 2\sqrt{2}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}\pm} f'(x) = \mp 2\sqrt{2}$

Protože f je spojitá v $\pm\sqrt{2}$ platí

$$f'_{\pm}(\sqrt{2}) = \pm 2\sqrt{2}, \quad f'_{\pm}(-\sqrt{2}) = \pm 2\sqrt{2},$$

speciálně $f'(\pm\sqrt{2})$ neexistuje.

- pro $x \in D_{f'}$ $\quad f'(x) = 0 \iff x = 0$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\operatorname{sgn}(x^2-2)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

tedy $\pm\sqrt{2}$ jsou body lok. minima (i globálního)

0 je bodem lok. maxima

- $$f''(x) = \left[\frac{2x}{|x^2-2|+1} \operatorname{sgn}(x^2-2)\right]'$$

$$= \frac{2(|x^2-2|+1) - 2x \cdot 2x \cdot \operatorname{sgn}(x^2-2)}{(|x^2-2|+1)^2} \cdot \operatorname{sgn}(x^2-2)$$

$$= \frac{2|x^2-2|\cdot \operatorname{sgn}(x^2-2) + 2\operatorname{sgn}(x^2-2) - 4x^2}{(|x^2-2|+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^2-2) - 4x^2 + 2\operatorname{sgn}(x^2-2)}{(|x^2-2|+1)^2}$$

$$= \frac{-4 - 2x^2 + 2\operatorname{sgn}(x^2-2)}{(|x^2-2|+1)^2} = 2\,\frac{\operatorname{sgn}(x^2-2) - 2 - x^2}{(|x^2-2|+1)^2}$$

$D_{f''} = D_{f'}$

- $f'' \leq 0$ $x \in D_{f''}$ tedy f je konkávní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ a $[\sqrt{2}, \infty)$

  (intervaly nelze rozšířit, protože body $\pm\sqrt{2}$ jsou lok. minima)

  f nemá inflexní body

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ale $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$,

  tedy f nemá asymptoty v $\pm\infty$.

- $R_f = [f(\sqrt{2}), +\infty) = [0, \infty)$